

УДК 517.392

И. В. Бойков, Ю. Ф. Захарова, Г. И. Гринченков, М. А. Семов

НЕНАСЫЩАЕМЫЕ КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Аннотация. *Актуальность и цели.* Гиперсингулярные интегралы в настоящее время находят все большие области применения – аэродинамика, теория упругости, электродинамика и геофизика. При этом их вычисление в аналитическом виде возможно лишь в весьма частных случаях. Поэтому приближенные методы вычисления гиперсингулярных интегралов являются актуальной задачей вычислительной математики. Этой задаче посвящено много работ. В частности, И. В. Бойковым и Ю. Ф. Захаровой опубликованы циклы работ по построению оптимальных методов вычисления гиперсингулярных интегралов. В 1975 г. в докладах АН СССР (т. 221, № 1) опубликована статья К. И. Бабенко, в которой он сообщил об открытии им принципиально новых – ненасыщаемых численных методов. Отличительной особенностью последних является способность автоматически подстраиваться под классы корректности решений рассматриваемых задач. Анализ известных квадратурных и кубатурных формул вычисления гиперсингулярных интегралов показал, что они являются насыщенными. Поэтому является актуальной задача построения ненасыщаемых алгоритмов вычисления гиперсингулярных и полигиперсингулярных интегралов. Этой задаче посвящена данная работа. *Материалы и методы.* Построение ненасыщаемых методов вычисления гиперсингулярных интегралов основано на конструктивной теории функций и теории сплайнов. *Результаты.* Построены оптимальные квадратурные формулы вычисления одного класса гиперсингулярных интегралов. Построены ненасыщаемые квадратурные и кубатурные формулы вычисления одномерных гиперсингулярных интегралов и полигиперсингулярных интегралов. Проведено сравнение эффективности вычисления гиперсингулярных интегралов насыщенными и ненасыщаемыми квадратурами. *Выводы.* Построенные ненасыщаемые методы позволяют эффективно вычислять гиперсингулярные интегралы при решении прикладных задач, когда априори неизвестна гладкость интегрируемых функций.

Ключевые слова: квадратурные формулы, кубатурные формулы, гиперсингулярные интегралы, ненасыщаемые алгоритмы, оптимальные алгоритмы.

I. V. Boykov, Yu. F. Zakharova, G. I. Grichenkov, M. A. Semov

UNSATURATED CUBATURE FORMULAE OF HYPERSINGULAR INTEGRATION

Abstract. *Background.* Hypersingular integrals are widely used in such areas as aerodynamics, theory of elasticity, electrodynamics, aerodynamics and geophysics. However, their closed form calculation is rarely possible. Therefore, using approximation methods for calculating hypersingular integrals is urgent for calculus mathematics. A lot of papers deal with this problem. I. V. Boikov and Yu. F. Zaharova

have published a series of papers on constructing optimal methods for calculating hypersingular integrals. In 1975 in the USSR Academy of Sciences Proceedings (volume 221, № 1) K. I. Babenko announced the discovery of fundamentally new unsaturated numerical methods. A distinctive feature of the latter is the ability to automatically adjust to the classes of problem solving correctness. The analysis of the quadrature and cubature formulae of calculating hypersingular integrals showed that they are saturated. Therefore, it seems significant to work out unsaturated algorithms to calculate hypersingular and polyhypersingular integrals. This paper deals with this task. *Materials and methods.* Developing methods of calculating unsaturated hypersingular integrals is based on the constructive theory of functions and splines. *Results.* The optimal quadrature formulae for calculating hypersingular integrals of the same class have been derived. Unsaturated quadrature and cubature formulae for calculating one-dimensional hypersingular and polyhypersingular integrals have been derived. A comparison of the efficiency of calculating hypersingular integrals using saturated and unsaturated quadratures has been made. *Conclusions.* Unsaturated methods make it possible to effectively calculate hypersingular integrals while solving practical problems when a priori smoothness of integrable functions is unknown.

Key words: quadrature formulae, cubature formulae, hypersingular integrals, unsaturated algorithms, optimal algorithms.

Введение

Приближенные методы вычисления гиперсингулярных интегралов представляют активно развивающееся направление, находящееся на пересечении математического анализа и вычислительной математики. Интерес к исследованиям в этой области обусловлен большим спектром научных и технических задач, требующих вычисления гиперсингулярных интегралов с большой степенью точности.

Несмотря на большое число работ, посвященных различным подходам к вычислению гиперсингулярных интегралов (краткий обзор этих работ приведен в разделе 4), остались неисследованными многие проблемы. Одной из них является проблема построения ненасыщаемых алгоритмов вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов.

Подробная постановка задачи приведена в разделе 5.

В данной работе построены ненасыщаемые алгоритмы вычисления одномерных гиперсингулярных интегралов и полигиперсингулярных интегралов.

Статья построена следующим образом. В разделе 1 приведены определения гиперсингулярных интегралов. В разделе 2 дано определение оптимальных квадратурных формул вычисления гиперсингулярных интегралов. В разделе 3 описаны классы функций, используемые в работе. В разделе 4 дан краткий обзор приближенных методов вычисления гиперсингулярных интегралов. Раздел 5 посвящен построению квадратурных формул вычисления гиперсингулярных интегралов, основанному на аппроксимации подынтегральной функции интерполяционным полиномом Лагранжа – Эрмита. В разделе 6 построены ненасыщаемые квадратурные формулы вычисления одномерных гиперсингулярных интегралов. Раздел 7 посвящен построению ненасыщаемых кубатурных формул вычисления полигиперсингулярных интегралов.

1. Определение гиперсингулярных интегралов

В данной работе рассматриваются гиперсингулярные интегралы, имеющие особенности нецелого и целого порядков. Эти интегралы определяются следующим образом.

Определение 1.1 [1, 2]. Интеграл вида $\int_a^b \frac{A(x)dx}{(b-x)^{p+\alpha}}$ при целом p и $0 < \alpha < 1$ определяет величину («конечную часть») рассматриваемого интеграла как предел при $x \rightarrow b$ суммы

$$\int_a^x \frac{A(t)dt}{(b-t)^{p+\alpha}} + \frac{B(x)}{(b-x)^{p+\alpha-1}},$$

если предположить, что $A(x)$ имеет p производных в окрестности точки b . Здесь $B(x)$ – любая функция, на которую налагаются два условия:

- 1) рассматриваемый предел существует;
- 2) $B(x)$ имеет по крайней мере p производных в окрестности точки $x = b$.

Определение 1.2 [3]. Интегралом $\int_a^b \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-c)^p}$, $a < c < b$, в смысле главного значения Коши – Адамара будем называть следующий предел:

$$\int_a^b \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-c)^p} = \lim_{v \rightarrow 0} \left[\int_a^{c-v} \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-c)^p} + \int_{c+v}^b \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-c)^p} + \frac{\xi(v)}{v^{p-1}} \right],$$

где $\xi(v)$ – некоторая функция, имеющая непрерывные производные до $(p-1)$ порядка и выбранная так, чтобы указанный предел существовал.

В конечных точках a и b гиперсингулярный интеграл определяется следующим образом.

Определение 1.3 [4, 5]. Интегралом $\int_a^b \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-a)^p}$ называется предел

$$\int_a^b \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-a)^p} = \lim_{v \rightarrow 0} \left[\int_{a+v}^b \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-a)^p} + \frac{\xi(v)}{v^{p-1}} + \xi_1(v) \ln |v| \right],$$

где $\xi(v)$ – некоторая функция, имеющая непрерывные производные до $(p-1)$ -го порядка, удовлетворяющие условию Дини – Липшица; $\xi_1(v)$ – некоторая функция, удовлетворяющая условию Дини – Липшица в окрестности от нуля. Функции $\xi(v)$ и $\xi_1(v)$ выбираются так, чтобы указанный предел существовал.

Это определение распространяется и на более общие случаи.

Пусть $T = [0, 1]^2$, $p = 1, 2, \dots$, $0 < \alpha < 1$. Рассмотрение интеграла

$$\iint_T \frac{A(x,y)dxdy}{x^{p+\alpha}y^{p+\alpha}} \quad (1)$$

начнем с того, что ограничим область интегрирования: $x \geq \varepsilon_1$, $y \geq \varepsilon_2$, обозначив через ε_1 и ε_2 два малых положительных числа. После этого интеграл можно сделать конечным, если вычислить интеграл (1) по частям и отбросить слагаемые, стремящиеся к бесконечности при стремлении ε_1 и ε_2 к нулю.

Введем область $T_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} = [\varepsilon_1, 1; \varepsilon_2, 1]$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$.

Определение 1.4 [4, 5]. Пусть $p = 1, 2, \dots$; $0 < \alpha < 1$. Конечной частью интеграла (1) называется предел

$$\iint_T \frac{A(x,y)dxdy}{x^{p+\alpha}y^{p+\alpha}} = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0, \varepsilon_2 \rightarrow 0} \left[\iint_{T_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}} \frac{A(x,y)dxdy}{x^{p+\alpha}y^{p+\alpha}} + \frac{B(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}{\varepsilon_1^{p+\alpha-1} \varepsilon_2^{p+\alpha-1}} \right], \quad (2)$$

в котором функция $B(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ имеет частные производные до $(2p-2)$ -го порядка и подбирается таким образом, чтобы предел существовал.

Введем область $T_\varepsilon = [\varepsilon, 1; \varepsilon, 1]$, $\varepsilon > 0$.

Определение 1.5 [4, 5]. Пусть $p = 2, 3, \dots$. Конечной частью интеграла $\iint_T \frac{A(x,y)dxdy}{x^p y^p}$ называется предел

$$\iint_T \frac{A(x,y)dxdy}{x^p y^p} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\iint_{T_\varepsilon} \frac{A(x,y)dxdy}{x^p y^p} + \frac{B(\varepsilon)}{\varepsilon^{2p-2}} + C(\varepsilon) \ln(\varepsilon) + D(\varepsilon) \ln^2(\varepsilon) \right], \quad (3)$$

где функция $B(\varepsilon)$ имеет производные до $(2p-1)$ -го порядка, а функции $C(\varepsilon)$, $D(\varepsilon)$ имеют производные первого порядка. Функции $B(\varepsilon)$, $C(\varepsilon)$ и $D(\varepsilon)$ подбираются таким образом, чтобы предел существовал.

Распространим приведенное выше определение на полигиперсингулярные интегралы с переменными сингулярностями. Для простоты обозначений ограничимся бигиперсингулярным интегралом

$$B\varphi = \iint_{\gamma_1 \gamma_2} \frac{\varphi(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1 - t_1)^{p_1} (\tau_2 - t_2)^{p_2}},$$

где γ_i – замкнутый ограниченный контур в плоскости комплексной переменной z_i , $i = 1, 2$. Будем считать, что $\gamma_i, i = 1, 2$, – гладкие контуры, удовлетворяющие условиям Ляпунова.

Построим окружность с центром в точке t_1 столь малого радиуса ρ_1 , что она пересекает контур γ_1 только в двух точках t_1' и t_1'' . Часть контура γ_1 , заключенного между точками t_1' и t_1'' , обозначим через l_1 .

Аналогичное построение проведем и на контуре γ_2 , часть контура γ_2 , расположенного между точками t_2' и t_2'' , обозначим через l_2 .

Интеграл $B\varphi$ определяется выражением

$$B\varphi = \lim_{\rho_1 \rightarrow 0, \rho_2 \rightarrow 0} \left[\int_{\gamma_1} \int_{\gamma_2} \frac{\varphi(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1 - t_1)^{p_1} (\tau_2 - t_2)^{p_2}} - \frac{\Gamma(\rho_1, \rho_2)}{\rho_1^{p_1-1} \rho_2^{p_2-1}} \right],$$

где $\Gamma(\rho_1, \rho_2)$ – функция, имеющая непрерывно дифференцируемые производные до $(p_1 - 1)$ порядка по переменной ρ_1 и до $(p_2 - 1)$ порядка по переменной ρ_2 .

Функция $\Gamma(\rho_1, \rho_2)$ выбирается таким образом, чтобы предел существовал и был единственным.

Отметим, что в соответствии с принятым в работе способом определения гиперсингулярных интегралов для нахождения функции $\Gamma(\rho_1, \rho_2)$ нужно вычислить по частям последний интеграл и из результата вычесть слагаемые, стремящиеся к бесконечности, когда $\rho_i \rightarrow 0, i = 1, 2$.

2. Постановка задачи построения оптимальной квадратурной формулы

Постановка задачи построения оптимальных квадратурных формул принадлежит А. Н. Колмогорову и в применении к интегралам Адамара заключается в следующем [4, 5].

Рассмотрим интеграл

$$A\varphi = \int_a^b \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - t)^p}, \quad p - \text{целое}, \quad a < t < b, \quad (4)$$

который будем вычислять по квадратурной формуле

$$A\varphi = \sum_{k=1}^N \sum_{l=0}^p \varphi^{(l)}(s_k) p_{kl}(t) + R_N(t, s_k, p_{kl}(t), \varphi) \quad (5)$$

с узлами s_k и весами $p_{kl}(t)$ ($k = 1, 2, \dots, N, l = 0, 1, \dots, p$). Величина p определяется гладкостью класса интегрируемых функций.

Под погрешностью квадратурной формулы (5) будем понимать величину $R_N(s_k, p_{kl}, \varphi) = \sup_t |R_N(t, s_k, p_{kl}(t), \varphi)|$.

Если Ψ – некоторый класс заданных на сегменте $[a, b]$ функций, то положим $R_N(s_k, p_{kl}, \Psi) = \sup_{\varphi \in \Psi} |R_N(s_k, p_{kl}, \varphi)|$.

Через $\zeta_N[\Psi]$ обозначим величину $\zeta_N[\Psi] = \inf_{(s_k, p_{kl})} R_N(s_k, p_{kl}, \Psi)$, в которой нижняя грань берется по всевозможным N узлам s_k и весам $p_{kl}(t)$ ($k = 1, 2, \dots, N, l = 0, 1, \dots, p$). Квадратурную формулу (5), построенную на узлах s_k^* и весах $p_{kl}^*(t)$ ($k = 1, 2, \dots, N$), будем называть оптимальной, асимптотически оптимальной, оптимальной по порядку, если

$$\frac{R_N(s_k^*, p_{kl}^*, \Psi)}{\zeta_N[\Psi]} = 1, \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{R_N(s_k^*, p_{kl}^*, \Psi)}{\zeta_N[\Psi]} = 1, R_N(s_k^*, p_{kl}^*, \Psi) \asymp \zeta_N[\Psi]$$

соответственно.

Аналогичным образом определяются оптимальные, асимптотически оптимальные, оптимальные по порядку кубатурные формулы вычисления полигиперсингулярных и многомерных гиперсингулярных интегралов [4–6].

3. Классы функций

Ниже описываются классы функций, на которых в данной работе строятся алгоритмы вычисления гиперсингулярных интегралов.

Класс $W^r(M; a, b)$ состоит из функций, заданных на отрезке $[a, b]$, непрерывных и имеющих непрерывные производные до $(r-1)$ -го порядка включительно и кусочно-непрерывную производную r -го порядка, удовлетворяющую на этом отрезке неравенству $|f^{(r)}(x)| \leq M$.

Класс $W_{L_p}^r(M; [a, b])$ $\left(W_p^r(M; [a, b]) \right)$ состоит из функций, заданных на $[a, b]$, имеющих абсолютно непрерывную производную порядка $(r-1)$ и производную $f^{(r)}(x)$ порядка r такую, что

$$\left[\int_a^b |f^{(r)}(x)|^p dx \right]^{1/p} \leq M \quad (1 \leq p \leq \infty),$$

где интеграл понимается в смысле Лебега. Для простоты обозначений ниже вместо $W_{L_p}^r(M; [a, b])$ будем писать $W_p^r(M)$.

Замечание. Если из контекста известен сегмент $[a, b]$, на котором определены классы функций, то вместо $W^r(M; [a, b])$, $W_{L_p}^r(M; [a, b])$ будем писать $W^r(M)$, $W_{L_p}^r(M)$ соответственно.

4. Обзор приближенных методов вычисления гиперсингулярных интегралов

Приближенным методам вычисления гиперсингулярных интегралов посвящено большое число публикаций.

Для вычисления гиперсингулярных интегралов с фиксированными особенностями вида

$$F\varphi = \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau) d\tau}{|\tau|^{p+\lambda}} \text{ и } I\varphi = \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau^p}$$

используются квадратурные формулы, основанные на различных подходах. Основной метод построения квадратурных формул для вычисления интегралов $F\varphi$ и $I\varphi$ заключается в замене подынтегральной функции $\varphi(t)$ n -мерным аппаратом приближения: интерполяционными полиномами, сплайнами, отрезками ортогональных рядов и т.д. Достаточно подробная библиография, посвященная вычислению интегралов $F\varphi$ и $I\varphi$, содержится в [4–7], и в этих работах также построены асимптотически оптимальные и оптимальные по порядку квадратурные формулы вычисления интегралов $F\varphi$ и $I\varphi$ на классах функций $W^r(1)$, $W_p^r(1)$.

Для вычисления гиперсингулярных интегралов

$$H\varphi = \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau)d\tau}{|\tau-t|^{p+\lambda}} \text{ и } G\varphi = \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^p}, -1 < t < 1,$$

различными авторами [4–14] построены квадратурные формулы, которые условно можно разделить на две большие группы: квадратурные формулы интерполяционного типа и квадратурные формулы типа Гаусса.

К первой группе (см. работы [4–7, 9, 10]) относятся квадратурные формулы, основанные на замене подынтегральной функции $\varphi(t)$ интерполяционными полиномами, сплайнами, отрезками рядов по ортогональным полиномам.

Ко второй группе (см. работы [12–14]) относятся квадратурные формулы, основанные на представлении гиперсингулярных интегралов, скажем, интеграла $G\varphi$ в виде

$$(G\varphi)(t) = \varphi(t) \int_{-1}^1 \frac{d\tau}{(\tau-t)^p} + \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{(\tau-t)^p} d\tau, \quad (6)$$

и в ряде случаев в применении к последнему интегралу квадратурных формул Гаусса.

При вычислении гиперсингулярных интегралов по квадратурным формулам Гаусса для каждого конкретного значения t строится специальная квадратурная формула. Поэтому применение квадратурных формул Гаусса для вычисления гиперсингулярных интегралов, по-видимому, целесообразно только для интегралов с фиксированными особенностями.

Для вычисления полисингулярных интегралов и многомерных гиперсингулярных интегралов в [4–6] построены оптимальные по порядку кубатурные формулы.

Приближенные методы вычисления гиперсингулярных, полигиперсингулярных и многомерных гиперсингулярных интегралов с весовыми множителями исследованы в [14].

5. Гиперсингулярные интегралы

В данном разделе строятся квадратурные формулы интерполяционного типа. Для этого, наряду с приближением подынтегральных функций интерполяционными полиномами Лагранжа, последние приближаются также интерполяционными полиномами Лагранжа – Эрмита.

Приведем, следуя [13], необходимые утверждения об эрмитовой интерполяции.

Пусть непрерывная функция f определена на сегменте $[a, b]$, $f \in W^r(1)$. Обозначим через t_k , $t_k \in (a, b)$, $k = 1, 2, \dots, n$, узлы полинома Чебышева первого рода, отображенные с сегмента $[-1, 1]$ на сегмент $[a, b]$. В качестве узлов t_k , $k = 1, 2, \dots, N$, можно использовать узлы и других ортогональных многочленов. Выбор полиномов Чебышева обусловлен тем, что у последних самая маленькая по порядку константа Лебега.

Обозначим через $L_{n,r}(f, [a, b], t)$ интерполяционный полином Лагранжа – Эрмита, определенный равенствами

$$L_{n,r}(f, [a, b], t_k) = f(t_k), \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

$$L_{n,r}^{(i)}(f, [a, b], a) = f^{(i)}(a), \quad i = 0, 1, \dots, r-1,$$

$$L_{n,r}^{(i)}(f, [a, b], b) = f^{(i)}(b), \quad i = 0, 1, \dots, r-1.$$

Интерполяционный полином Лагранжа – Эрмита может быть представлен выражением

$$\begin{aligned} L_{n,r}(f, [a, b], t) = & (t-a)^r (b-t)^r \sum_{k=1}^n \varphi_{n,k}(t) \frac{f(t_k)}{(t_k-a)^r (b-t_k)^r} + \\ & + (t-a)^r T_n(t) \sum_{j=0}^{r-1} \frac{(b-t)^j}{j!} \left[\frac{f(t)}{(t-a)^r T_n(t)} \right]_{t=b}^{(j)} + \\ & + (b-t)^r T_n(t) \sum_{j=0}^{r-1} \frac{(t-a)^j}{j!} \left[\frac{f(t)}{(b-t)^r T_n(t)} \right]_{t=a}^{(j)}, \end{aligned}$$

где $T_n(t)$ – полином Чебышева первого рода, отображенный с сегмента $[-1, 1]$ на сегмент $[a, b]$; $\varphi_{n,k}(t)$ – фундаментальные полиномы Лагранжа по узлам t_k , $k = 1, 2, \dots, n$.

Известны [13] следующие утверждения о сходимости интерполяционных полиномов Эрмита:

$$f(t) - L_{n,r}(f, [a, b], t) = \frac{(t-a)^{r-1}}{(r-1)!} \left(f^{(r-1)}(\Theta) - L_{n,r}^{(r-1)}(f, [a, b], \Theta) \right),$$

где $a < \Theta < t-a$;

$$|f(t) - L_{n,r}(f, [a, b], t)| = \frac{(b-t)^{r-1}}{(r-1)!} \left(f^{(r-1)}(\Theta) - L_{n,r}^{(r-1)}(f, [a, b], \Theta) \right),$$

где $b-t < \Theta < b$.

Пусть s – натуральное число. Обозначим через $\zeta_1, \dots, \zeta_s$ ($\zeta_i \in [-1, 1]$, $i = 1, 2, \dots, s$) узлы полинома Чебышева первого рода. Через $\zeta'_1, \dots, \zeta'_s$ обозначим образы узлов $\zeta_1, \dots, \zeta_s$ при отображении сегмента $[-1, 1]$ на сегмент $[a, b]$ (из контекста каждый раз будет ясно, что понимается под сегментом $[a, b]$). Пусть $f \in C[a, b]$. Через $P_s(f, [a, b])$ обозначим полином, интерполирующий функцию f на сегменте $[a, b]$ по узлам ζ'_i , $i = 1, 2, \dots, s$.

Замечание. В качестве узлов интерполяции и в полиномах Лагранжа и в полиномах Лагранжа – Эрмита можно использовать узлы различных ортогональных многочленов, а также равноотстоящие узлы.

Из последних двух неравенств имеем

$$|f(t) - L_{n,r}(f, [a, b], t)| \leq ((b-t)(a-t))^{(r-1)/2} \|f^{(r-1)}(\Theta) - L_{n,r}^{(r-1)}(f, [a, b], \Theta)\|,$$

где $a < \Theta < b$.

Кроме того, известно [12] следующее неравенство:

$$|f^{(r-1)}(t) - L_{n,r}^{(r-1)}(f, [a, b], t)| \leq c(t-a)^{1/2}(b-t)^{1/2} \frac{\ln n}{n}, \quad a \leq t \leq b.$$

Построим квадратурные формулы интерполяционного типа для вычисления гиперсингулярных интегралов:

$$J\varphi = \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau)}{(\tau-t)^p} d\tau. \quad (7)$$

Пусть $\varphi(t) \in W^r(1)$, $r > p-1$.

В работах [4–6] построены оптимальные по порядку квадратурные формулы вычисления интегралов вида (7) на классе $W^r(1)$. При этом для каждого значения r строится оптимальная (по порядку) квадратурная формула, которая уже не является оптимальной для другого значения r , т.е. при каждом фиксированном r строится своя оптимальная по порядку квадратурная формула.

Поэтому представляет интерес построение универсальных алгоритмов, погрешность которых «близка» к погрешности оптимальных алгоритмов. Такие квадратурные формулы построены в следующем разделе.

Помимо указанного выше недостатка, оптимальные по порядку квадратурные формулы вычисления гиперсингулярных интегралов с переменной особенностью, предложенные в [4, 5], имеют еще один недостаток: в непосредственной окрестности особой точки нужно строить дополнительный интерполяционный полином. Для того чтобы избежать этого недостатка, в [6] предлагается использовать интерполяционные полиномы Эрмита. В данном разделе подробно описан способ построения оптимальных квадратурных формул интерполяционного типа, основанный на аппроксимации подынтегральной функции интерполяционным полиномом Лагранжа – Эрмита.

Интеграл (7) будем вычислять по квадратурным формулам (к.ф.)

$$J\varphi = \sum_{k=1}^N \sum_{l=0}^p p_{kl}(t) \varphi^{(l)}(t_k) + R_N(t, t_k, p_{kl}, \varphi), \quad (8)$$

где $t_k (-1 \leq t_k \leq 1)$ и p_l – узлы и коэффициенты к.ф. (8); p – число производных, определяемое гладкостью класса функций Ψ , на котором вычисляется интеграл (7).

В монографии [5] получена оценка

$$\zeta_N[W^r(1)] \geq cN^{-r-1+p}. \quad (9)$$

Пусть Ψ – некоторый класс функций, на котором существует гиперсингулярный интеграл (7). Усложняя доказательство, приведенное в [5, 6], можно показать, что

$$\zeta_N[\Psi] \geq cN^{p-1} \inf_{t_k \in \Psi_{k-1}} \sup_{\varphi \in \Psi_{k-1}} \int_{-1}^1 \varphi(t) dt,$$

где Ψ_k означает множество функций (входящих в класс Ψ), определенных на сегменте $[-1, 1]$, неотрицательных на этом сегменте и обращающихся в нуль в узлах t_k , $t_k \in [-1, 1]$, $k = 1, 2, \dots, N$. Нижняя грань берется по всевозможным наборам узлов $\{t_k\}$, $k = 1, 2, \dots, N$, расположенных на сегменте $[-1, 1]$.

Построим квадратурную формулу вычисления интегралов вида (7).

Пусть $\Delta_k = [v_k, v_{k+1}]$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, $v_k = -1 + 2k/N$, $k = 0, 1, \dots, N$.

На каждом сегменте Δ_k подынтегральную функцию $\varphi(t)$ будем аппроксимировать интерполяционным полиномом Лагранжа – Эрмита $L_{r,p}(\varphi, \Delta_k, t)$, $k = 0, 1, \dots, N-1$. Тогда

$$J\varphi = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{\Delta_k} \frac{\varphi(\tau)}{(\tau-t)^p} d\tau = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{\Delta_k} \frac{L_{r,p}(\varphi, \Delta_k, \tau)}{(\tau-t)^p} d\tau + R_N(\varphi). \quad (10)$$

Оценим погрешность квадратурной формулы (10). Пусть $t \in \Delta_j$, $0 \leq j \leq N-1$. Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} |R_N(\varphi)| \leq & \sum_{k=0}^{j-1} \left| \int_{\Delta_k} \frac{\Psi_{r,p}(\Delta_k, \tau)}{(\tau-t)^p} d\tau \right| + \\ & + \left| \int_{\Delta_j} \frac{\Psi_{r,p}(\Delta_j, \tau)}{(\tau-t)^p} d\tau \right| + \sum_{k=j+1}^{N-1} \left| \int_{\Delta_k} \frac{\Psi_{r,p}(\Delta_k, \tau)}{(\tau-t)^p} d\tau \right| = r_1 + r_2 + r_3, \end{aligned} \quad (11)$$

где $\Psi_{r,p}(\Delta_k, \tau) = \varphi(\tau) - L_{r,p}(\varphi, \Delta_k, \tau)$.

Оценим каждое слагаемое r_i , $i = 1, 2, 3$, в отдельности.

Вначале оценим слагаемое r_2 .

Зафиксируем достаточно малое значение η такое, что $[t - \eta, t + \eta] \subset \Delta_j$; вычислим по частям интеграл

$$\begin{aligned} & \int_{\Delta_j \setminus [t-\eta, t+\eta]} \frac{\Psi_{r,p}(\Delta_j, \tau)}{(\tau-t)^p} d\tau = \\ &= \frac{1}{p-1} \Psi_{r,p}(\Delta_j, t-\eta) \frac{1}{(-\eta)^{p-1}} - \frac{1}{p-1} \Psi_{r,p}(\Delta_j, t+\eta) \frac{1}{(\eta)^{p-1}} + \dots + \\ &+ \frac{1}{(p-1)!} \Psi_{r,p}^{(p-1)}(\Delta_j, t-\eta) \ln |\eta| - \frac{1}{(p-1)!} \Psi_{r,p}^{(p-1)}(\Delta_j, t+\eta) \ln \eta - \\ &- \frac{1}{(p-1)!} \int_{\Delta_j \setminus [t-\eta, t+\eta]} \Psi_{r,p}^{(p)}(\Delta_j, \tau) \ln |\tau-t| d\tau. \end{aligned}$$

Воспользовавшись определением гиперсингулярного интеграла, получим

$$r_2 \leq \frac{1}{(p-1)!} \int_{\Delta_j} |\Psi_{r,p}^{(p)}(\Delta_j, \tau)| \ln |\tau-t| d\tau.$$

Из свойств полиномов наилучшего приближения следует, что $|\Psi_{r,p}(\Delta_j, \tau)| \leq E_{r+2p-2}(\varphi, \Delta_j) \lambda_r(L, E)$, где $E_r(\varphi, \Delta_j)$ – наилучшее равномерное приближение функции φ полиномами степени r на сегменте Δ_j ; $\lambda_r(L, E)$ – константа Лебега интерполяционного полинома Лагранжа – Эрмита.

Пусть $\varphi \in W^r(1)$, тогда

$$E_r(\varphi, \Delta_j) \leq \frac{c}{N^r} \frac{1}{r^r}.$$

Известно [15] следующее утверждение, принадлежащее А. А. Маркову.

Лемма 1. Если полином $P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ степени не выше n на сегменте $[a, b]$ удовлетворяет неравенству $|P_n(x)| \leq M$, то на том же сегменте $|P'_n(x)| \leq 2Mn^2 / (b-a)$.

Воспользовавшись этим неравенством и используя метод доказательства обратных теорем конструктивной теории функций [15], можно показать, что при $r > 2p$

$$|\Psi_{r,p}^{(p)}(\Delta_j, \tau)| \leq \frac{c}{N^{r-p}}.$$

Следовательно, $r_2 \leq \frac{c}{N^{r-p+1}} \ln N$.

Приступим к оценке суммы r_1 . Представим r_1 в виде

$$r_1 = \sum_{k=0}^{j-2} \left| \int_{\Delta_k} \frac{\Psi_{r,p}(\Delta_k, \tau)}{(\tau-t)^p} d\tau \right| + \left| \int_{\Delta_{j-1}} \frac{\Psi_{r,p}(\Delta_{j-1}, \tau)}{(\tau-t)^p} d\tau \right| = r_{11} + r_{12}. \quad (12)$$

Оценим каждое выражение в отдельности. Очевидно,

$$\begin{aligned} r_{11} &\leq \max_{0 \leq k \leq j-2} \max_{t \in \Delta_k} |\Psi_{r,p}(\Delta_k, t)| \sum_{k=0}^{j-2} \frac{N^{p-1}}{(2(j-k-1))^{p-1}} \leq \frac{c}{N^{r-p+1}}; \\ r_{12} &= \frac{1}{(p-1)!} \int_{\Delta_{j-1}} |\Psi_{r,p}^{(p)}(\Delta_{j-1}, \tau)| |\ln(\tau-t)| d\tau \leq \\ &\leq c \max_{t \in \Delta_{j-1}} |\Psi_{r,p}^{(p)}(\Delta_{j-1}, t)| \int_{\Delta_{j-1}} |\ln(\tau-t)| d\tau \leq \frac{c \ln N}{N^{r-p+1}}. \end{aligned} \quad (13)$$

Аналогичным образом доказывается неравенство

$$r_3 \leq \frac{c \ln N}{N^{r-p+1}}. \quad (14)$$

Из неравенств (11)–(14) следует оценка $|R_N(\varphi)| \leq c N^{-(r-p-1)} \ln N$.

Так как φ – произвольная функция из класса функций $W^r(1)$, то окончательно имеем

$$R_N[W^r(1)] \leq \frac{c \ln N}{N^{r-p+1}}. \quad (15)$$

Из сопоставления оценок (9) и (15) следует, что квадратурная формула (10) не является оптимальной по порядку.

Для построения оптимальной по порядку квадратурной формулы следует несколько усложнить конструкцию формулы (10).

Пусть $t \in \Delta_j$, $j = 1, 2, \dots, N-2$. Рассмотрим квадратурную формулу

$$\begin{aligned} J\varphi &= \sum_{k=0}^{j-2} \int_{\Delta_k} \frac{L_{r,p}(\varphi, \Delta_k, \tau)}{(\tau-t)^p} d\tau + \int_{\Delta_j^*} \frac{L_{r,p}(\varphi, \Delta_j^*, \tau)}{(\tau-t)^p} d\tau + \\ &+ \sum_{k=j+2}^{N-1} \int_{\Delta_k} \frac{L_{r,p}(\varphi, \Delta_k, \tau)}{(\tau-t)^p} d\tau + R_n(\varphi), \end{aligned} \quad (16)$$

где $\Delta_j^* = \Delta_{j-1}^* \cup \Delta_j^* \cup \Delta_{j+1}^*$.

Повторяя рассуждения, проведенные при оценке погрешности квадратурной формулы (9), покажем, что при $-1 + \frac{2}{N} \leq t \leq 1 - \frac{2}{N}$

$$|R_N(\varphi)| \leq cN^{-(r-p+1)}.$$

Погрешность квадратурной формулы (16) оценивается неравенством

$$\begin{aligned} |R_N(\varphi)| \leq & \sum_{k=0}^{j-2} \left| \int_{\Delta_k} \frac{\Psi_{r,p}(\Delta_k, \tau)}{(\tau-t)^p} d\tau \right| + \left| \int_{\Delta_j^*} \frac{\Psi_{r,p}(\Delta_j^*, \tau)}{(\tau-t)^p} d\tau \right| + \\ & + \sum_{k=j+2}^{N-1} \left| \int_{\Delta_k} \frac{\Psi_{r,p}(\Delta_k, \tau)}{(\tau-t)^p} d\tau \right| = r_4 + r_5 + r_6. \end{aligned} \quad (17)$$

Оценивая r_5 , заметим, что

$$\begin{aligned} r_5 & \leq \frac{1}{(p-1)!} \left| \int_{\Delta_j^*} \frac{\Psi_{r,p}^{(p-1)}(\Delta_j^*, \tau)}{\tau-t} dt \right| = \\ & = \frac{1}{(p-1)!} \left| \int_{\Delta_j^*} \frac{\Psi_{r,p}^{(p-1)}(\Delta_j^*, \tau) - \Psi_{r,p}^{(p-1)}(\Delta_j^*, t)}{\tau-t} dt \right| + \frac{1}{(p-1)!} \left| \Psi_{r,p}^{(p-1)}(\Delta_j^*, t) \int_{\Delta_j^*} \frac{d\tau}{\tau-t} \right| = \\ & = \frac{1}{(p-1)!} \int_{\Delta_j^*} \left| \Psi_{r,p}^{(p)}(\Delta_j^*, \Theta) \right| d\tau + c \left| \Psi_{r,p}^{(p-1)}(\Delta_j^*, t) \right| \leq \frac{c}{N^{r-p+1}}. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что

$$r_4 + r_6 \leq \frac{c}{N^{r-p+1}},$$

и, следовательно,

$$|R_N(\varphi)| \leq \frac{c}{N^{r-p+1}}.$$

Замечание 1. При практической реализации формул (10) и (16) следует воспользоваться рекомендациями, предложенными в [6].

Замечание 2. Погрешность формулы (16) на сегментах Δ_0 и Δ_{N-1} оценивается неравенством $cN^{-(r-p+1)} \ln N$. Нетрудно видеть, что при вычислении интегралов вида $\int_{\gamma} \frac{\varphi(\tau)}{(\tau-t)^p} d\tau$, где γ – единичная окружность

с центром в начале координат, формула, аналогичная (16), имеет погрешность $cN^{-(r-p+1)}$.

6. Ненасыщаемые квадратурные формулы

В этом разделе строятся ненасыщаемые квадратурные формулы вычисления гиперсингулярных интегралов вида (7).

Пусть N – целое число, $n = \lceil \ln N \rceil$, $M = \lceil N / n \rceil$. Пусть $v_k = -1 + 2k / M$, $k = 0, 1, \dots, M$, $\Delta_k = [v_k, v_{k+1}]$, $k = 0, 1, \dots, M-1$.

Интеграл (7) будем вычислять по квадратурной формуле

$$J\varphi = \sum_{k=0}^{M-1} \int_{\Delta_k} \frac{L_{n,p}(\varphi, \Delta_k, \tau)}{(\tau - t)^p} dt + R_n(\varphi). \quad (18)$$

Пусть $t \in \Delta_j$, $j = 0, 1, \dots, M-1$.

Погрешность квадратурной формулы (18) оценивается неравенством

$$\begin{aligned} |R_N(\varphi)| &\leq \sum_{k=0}^{M-1} \left| \int_{\Delta_k} \frac{\Psi_{n,p}(\Delta_k, \tau)}{(\tau - t)^p} dt \right| = \\ &= \sum_{k=0}^{j-1} \left| \int_{\Delta_k} \frac{\Psi_{n,p}(\Delta_k, \tau)}{(\tau - t)^p} dt \right| + \left| \int_{\Delta_j} \frac{\Psi_{n,p}(\Delta_j, \tau)}{(\tau - t)^p} dt \right| + \\ &+ \sum_{k=j+1}^{M-1} \left| \int_{\Delta_k} \frac{\Psi_{n,p}(\Delta_k, \tau)}{(\tau - t)^p} dt \right| = r_1 + r_2 + r_3. \end{aligned} \quad (19)$$

Оценим в отдельности каждое слагаемое в правой части формулы (19).

Повторяя рассуждения, проведенные в предыдущем разделе, имеем при $n > r > 2p$

$$\begin{aligned} r_2 &\leq \frac{1}{(p-1)!} \int_{\Delta_j} |\Psi_{n,p}^{(p)}(\Delta_j, \tau)| \|\ln |\tau - t|\| d\tau \leq \\ &\leq \frac{c}{M} \max_{t \in \Delta_j} |\Psi_{n,p}^{(p)}(\Delta_j, t)| \ln M = \frac{c}{M} \left(\frac{\lambda_n(L, E)}{M} \right)^{r-p} \frac{1}{n^{r-2p}} \ln M = \\ &= \frac{c}{N} \frac{(\lambda_n(L, E))}{N^{r-p}} n^{p+1} \ln M = \frac{c}{N^{r-p+1}} (\lambda_n(L, E)) \ln^{p+2} N; \\ r_1 &= r_{11} + r_{12} = \sum_{k=0}^{j-2} \left| \int_{\Delta_k} \frac{\Psi_{n,p}(\Delta_k, \tau)}{(\tau - t)^p} dt \right| + \left| \int_{\Delta_{j-1}} \frac{\Psi_{n,p}(\Delta_{j-1}, \tau)}{(\tau - t)^p} dt \right|; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{11} &\leq \frac{c}{M} \max_k \max_{t \in \Delta_k} |\Psi_{n,p}(\Delta_k, \tau)| \sum_{k=0}^{j-1} \left(\frac{M}{j-k} \right)^p \leq \\ &\leq cM^{p-1} \frac{1}{M^r} \frac{\lambda_n(L, E)}{n^r} \leq \frac{c\lambda_n(L, E)}{N^{r-p+1}}, \\ r_{12} &\leq \frac{c}{M} |\Psi_{n,p}^{(p)}| \ln M \leq \frac{c(\lambda_n(L, E))}{N^{r-p+1}} \ln^{p+2} N. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$r_1 \leq \frac{c(\lambda_n(L, E))}{N^{r-p+1}} \ln^{p+2} N, \quad r_3 \leq \frac{c\lambda_n(L, E)}{N^{r-p+1}} \ln^{p+2} N$$

и

$$|R_N(\varphi)| \leq r_1 \leq \frac{c\lambda_n(L, E)}{N^{r-p+1}} \ln^{p+2} N.$$

Достоинством формулы (18) является ее ненасыщаемость на классе функций $W^r(1)$, $r = p, p+1, \dots$, так как при любом r найдется такое N , начиная с которого $n = \lceil \ln N \rceil > r$, и, следовательно, полностью используется гладкость функции φ . Появление множителя $\lambda_n(L, E) \ln^{p+2} N$ является «платой» за универсальность алгоритма.

7. Полигиперсингулярные интегралы

В этом разделе строятся ненасыщаемые алгоритмы вычисления полигиперсингулярных интегралов

$$B\varphi = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1 - t_1)^p (\tau_2 - t_2)^p}, \quad p = 2, 3, \dots \quad (20)$$

При этом мы ограничиваемся рассмотрением бигиперсингулярных интегралов для простоты обозначений.

Пусть N – натуральное число, $n = \lceil N \rceil$, $M = \lceil N / n \rceil$.

Пусть $\Delta_{kl} = [v_k, v_{k+1}; v_l, v_{l+1}]$, $k, l = 0, 1, \dots, M-1$, $v_k = -1 + 2k / M$, $k = 0, 1, \dots, M$.

В разделе 5 был введен оператор $L_{r,p}(f, [a, b], t)$ проектирования функций $f \in W^r$, $r \geq p$, на интерполяционные полиномы Лагранжа – Эрмита.

Обозначим через $L_{r_1, p_1; r_2, p_2}(f, [a_1, b_1; a_2, b_2], (t_1, t_2))$ оператор, заключающийся в повторном применении операторов $L_{r_i, p_i}(f, [a_i, b_i], t_i)$, $i = 1, 2$:

$$L_{r_1, p_1; r_2, p_2}(f, [a_1, b_1; a_2, b_2], (t_1, t_2)) =$$

$$= L_{r_1, p_1}(L_{r_2, p_2}(f, [a_2, b_2], t_2), [a_1, b_1], t_1).$$

Интеграл (20) будем вычислять по кубатурной формуле

$$B\varphi = \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{M-1} \int_{\Delta_{kl}} \int \frac{L_{r,p;r,p}(\varphi, \Delta_{kl}, \tau_1, \tau_2)}{(\tau_1 - t_1)^p (\tau_2 - t_2)^p} d\tau + R_{NN}(\varphi). \quad (21)$$

Пусть $(t_1, t_2) \in \Delta_{ij}$, $0 \leq i, j \leq M-1$.

Оценим погрешность кубатурной формулы (21). Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} |R_{NN}\varphi| \leq & \sum_{k=0}^{i-1} \sum_{l=0}^{j-1} \int_{\Delta_{kl}} \int \frac{L_{r,p;r,p}(\varphi, \Delta_{kl}, \tau_1, \tau_2)}{(\tau_1 - t_1)^p (\tau_2 - t_2)^p} d\tau_1 d\tau_2 + \\ & + \sum_{k=0}^{i-1} \sum_{l=j+1}^{M-1} \int_{\Delta_{kl}} \int \frac{L_{r,p;r,p}(\varphi, \Delta_{kl}, \tau_1, \tau_2)}{(\tau_1 - t_1)^p (\tau_2 - t_2)^p} d\tau_1 d\tau_2 + \\ & + \sum_{k=i+1}^{M-1} \sum_{l=0}^{j-1} \int_{\Delta_{kl}} \int \frac{L_{r,p;r,p}(\varphi, \Delta_{kl}, \tau_1, \tau_2)}{(\tau_1 - t_1)^p (\tau_2 - t_2)^p} d\tau_1 d\tau_2 + \\ & + \sum_{k=i+1}^{M-1} \sum_{l=j+1}^{M-1} \int_{\Delta_{kl}} \int \frac{L_{r,p;r,p}(\varphi, \Delta_{kl}, \tau_1, \tau_2)}{(\tau_1 - t_1)^p (\tau_2 - t_2)^p} d\tau_1 d\tau_2 + \\ & + \sum_{l=0}^{j-1} \int_{\Delta_{il}} \int \frac{L_{r,p;r,p}(\varphi, \Delta_{il}, \tau_1, \tau_2)}{(\tau_1 - t_1)^p (\tau_2 - t_2)^p} d\tau_1 d\tau_2 + \\ & + \sum_{l=j+1}^{M-1} \int_{\Delta_{il}} \int \frac{L_{r,p;r,p}(\varphi, \Delta_{il}, \tau_1, \tau_2)}{(\tau_1 - t_1)^p (\tau_2 - t_2)^p} d\tau_1 d\tau_2 + \\ & + \sum_{k=0}^{i-1} \int_{\Delta_{kj}} \int \frac{L_{r,p;r,p}(\varphi, \Delta_{kj}, \tau_1, \tau_2)}{(\tau_1 - t_1)^p (\tau_2 - t_2)^p} d\tau_1 d\tau_2 + \\ & + \sum_{k=i+1}^{M-1} \int_{\Delta_{kj}} \int \frac{L_{r,p;r,p}(\varphi, \Delta_{kj}, \tau_1, \tau_2)}{(\tau_1 - t_1)^p (\tau_2 - t_2)^p} d\tau_1 d\tau_2 + \\ & + \int_{\Delta_{ij}} \int \frac{L_{n,p;n,p}(\varphi, \Delta_{ij}, \tau_1, \tau_2)}{(\tau_1 - t_1)^p (\tau_2 - t_2)^p} d\tau_1 d\tau_2 = r_1 + \dots + r_9. \end{aligned}$$

Оценим выражение r_9 . По определению гиперсингулярных интегралов имеем

$$r_9 \leq \left| \int_{\Delta_{ij}} \frac{\partial^{2p} \Psi_{n,p;n,p}(\varphi, \Delta_{ij}, \tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_1^p \partial \tau_2^p} |\ln |\tau_1 - t_1|| |\ln |\tau_2 - t_2|| d\tau_1 d\tau_2 \right| \leq$$

$$\leq \frac{c}{M^2} \frac{1}{M^{r-2p}} \frac{\lambda_n^2(L, E)}{n^{r-4p}} \ln^2 M \leq \frac{cn^{2p+4}}{N^{r-2p+2}} \lambda_n^2(L, E).$$

Так как суммы $r_1, \dots, r_4$ оцениваются одинаково, то ограничимся рассмотрением первой из них.

Очевидно,

$$c \sum_{k=0}^{i-1} \sum_{l=0}^{j-1} \frac{M^{2p-2}}{(i-k)^p (j-l)^p} \max_{k,l} \max_{(t_1, t_2) \in \Delta_{kl}} |L_{r,p;r,p}(\varphi, \Delta_{kl}, t_1, t_2)| \leq$$

$$\leq c M^{2p-2} \frac{1}{M^r} \frac{1}{n^r} \lambda_n(L, E) \leq c \frac{1}{N^{r-2p+2}} \frac{\lambda_n^2(L, E)}{n^r}.$$

Суммы $r_5, \dots, r_8$ оцениваются аналогично, поэтому ограничимся рассмотрением оценки для выражения r_5 :

$$r_5 \leq \sum_{l=0}^{j-2} \int_{\Delta_{il}} \int \frac{L_{r,p;r,p}(\varphi, \Delta_{il}, \tau_1, \tau_2)}{(\tau_1 - t_1)^p (\tau_2 - t_2)^p} d\tau_1 d\tau_2 +$$

$$+ \int_{\Delta_{i,j-1}} \int \frac{L_{r,p;r,p}(\varphi, \Delta_{i,j-1}, \tau_1, \tau_2)}{(\tau_1 - t_1)^p (\tau_2 - t_2)^p} d\tau_1 d\tau_2 = r_{51} + r_{52}.$$

Сумма r_{51} оценивается аналогично сумме r_1 , а интеграл r_{52} оценивается аналогично интегралу r_0 .

Собирая эти оценки, имеем

$$|R_{NN}(\varphi)| \leq \frac{cn^{2p+4}}{N^{r-2p+2}} \lambda_n^2(L, E).$$

Замечание. Множитель $n^{2p+4} \lambda_n^2(L, E)$ является «платой» за ненасыщаемость. Повторяя сделанные выше оценки, можно показать, что кубатурная формула (21) имеет погрешность

$$|R_{NN}(\varphi)| \leq \frac{c}{N^{r-2p+2}} \ln^2 N.$$

Замечание. Аналогичным образом строятся ненасыщаемые алгоритмы вычисления многомерных гиперсингулярных интегралов.

Список литературы

1. **Hadarnard, J.** Lecons sur la Propagation des Ondes et les Equations de l'Hydrodynamique. Herman / J. Hadarnard. – Paris, 1903. – 320 p. (reprinted by Chelsea. – New York, 1949).

2. **Адамар, Ж.** Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа / Ж. Адамар. – М. : Наука, 1978. – 351 с.
3. **Чикин, Л. А.** Особые случаи краевой задачи Римана и сингулярные интегральные уравнения / Л. А. Чикин // Ученые записки Казанского гос. ун-та. 1953. – Т. 113. № 10. – С. 53–105.
4. **Boikov, I. V.** Numerical methods of computation of singular and hypersingular integrals / I. V. Boykov // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. 2001. – № 28 (3). – P. 127–179.
5. **Бойков, И. В.** Приближенные методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов : моногр. / И. В. Бойков. – Пенза : Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2009. – Ч. 2. – 252 с.
6. **Boikov, I. V.** Accuracy optimal methods for evaluating hypersingular integrals / I. V. Boykov, E. S. Ventsel, A. I. Boykova // Applied Numerical Mathematics. – 2009. – V. 59, № 6. – P. 1366–1385.
7. **Бойков, И. В.** Приближенные методы вычисления интегралов Адамара и решение гиперсингулярных интегральных уравнений / И. В. Бойков, Н. Ф. Добрынина, Л. Н. Домнин. – Пенза : Изд-во Пенз. гос. ун-та, 1996. – 188 с.
8. **Crisculo, G.** A new algorithm for Cauchy principal value and Hadamard-type finite integrals. / G. Crisculo // Journal of Comput. Appl. Math. – 1997. – V. 78. – P. 255–275.
9. **Hildenbrand, J.** Numerical computation of hypersingular integrals and application to the boundary integral equation for the stress tensor / J. Hildenbrand, G. Kuhn // Eng. Anal. Boundary Elements. – 1992. – V. 10. – P. 209–217.
10. **Kolm, P.** Numerical quadratures for singular and hypersingular integrals / P. Kolm, V. Rokhlin // Computers and Mathematics with Applications. – 2001. – V. 41. – P. 327–352.
11. **Lutz, E.** An overview of integration methods for hypersingular integrals / E. Lutz, L. J. Gray, A. R. Ingraffia // Boundary Elements / ed.: C. A. Brebbia, G. S. Gipson. – CMP, Southampton, 1991. – Vol. XIII. – P. 913–925.
12. **Krishnasamy, G.** Hypersingular boundary integral equations: their occurrence, interpretation, regularization, and computation. / G. Krishnasamy, F. J. Rizzo, T. J. Rudolph // Development in Boundary Element Methods / ed.: P. K. Nanerjee, S. Kobayashi. – Sci. Publ., Barking, 1991. – Vol. 7, Appl.
13. **Monegato, G.** Numerical evaluation of hypersingular integrals / G. Monegato // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 1994. – Vol. 50. – P. 9–31.
14. **Захарова, Ю. Ф.** Оптимальные методы вычисления многомерных сингулярных интегралов и решения сингулярных интегральных уравнений : дис. ... канд. физ.-мат. наук / Захарова Ю. Ф. – Саранск, 2004. – 197 с.
15. **Натансон, И. П.** Конструктивная теория функций / И. П. Натансон. – М. ; Л. : ГИФМЛ, 1949. – 688 с.

References

1. Hadamard J. *Lecons sur la Propagation des Ondes et les Equations de l'Hydrodynamique*. Herman. Paris, 1903, 320 p. (reprinted by Chelsea. New York, 1949).
2. Adamar Zh. *Zadacha Koshi dlya lineynykh uravneniy s chastnymi proizvodnymi giperbolicheskogo tipa* [Cauchy problem for linear equations with partial derivatives of hyperbolic type]. Moscow: Nauka, 1978, 351 p.
3. Chikin L. A. *Uchenye zapiski Kazanskogo gos. un-ta*. [Proceedings of Kazan State University]. 1953, vol. 113, no. 10, pp. 53–105.
4. Boikov I. V. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*. 2001, no. 28 (3), pp. 127–179.
5. Boykov I. V. *Priblizhennyye metody vychisleniya singulyarnykh i gipersingulyarnykh integralov: monogr.* [Approximate methods of singular and hypersingular integrals calculation: monograph]. Penza: Izd-vo Penz. gos. un-ta, 2009, part 2, 252 p.

6. Boykov I. V., Ventsel E. S., Boykova A. I. *Applied Numerical Mathematics*. 2009, vol. 59, no. 6, pp. 1366–1385.
7. Boykov I. V., Dobrynina N. F., Domnin L. N. *Priblizhennyye metody vychisleniya integralov Adamara i reshenie gipersingulyarnykh integral'nykh uravneniy* [Approximate methods of Hadamard integral calculation and solution of hypersingular equations]. Penza: Izd-vo Penz. gos. un-ta, 1996, 188 p.
8. Crisculo G. A. *Journal of Comput. Appl. Math.* 1997, vol. 78, pp. 255–275.
9. Hildenbrand J., Kuhn G. *Eng. Anal. Boundary Elements*. 1992, vol. 10, pp. 209–217.
10. Kolm P., Rokhlin V. *Computers and Mathematics with Applications*. 2001, vol. 41, pp. 327–352.
11. Lutz E., Gray L. J., Ingraffè A. R. *Boundary Elements*. CMP, Southampton, 1991, vol. XIII, pp. 913–925.
12. Krishnasamy G., Rizzo F. J., Rudolph T. J. *Development in Boundary Element Methods*. Sci. Publ., Barking, 1991, vol. 7, Appl.
13. Monegato G. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 1994, vol. 50, pp. 9–31.
14. Zakharova Yu. F. *Optimal'nye metody vychisleniya mnogomernykh singulyarnykh integralov i resheniya singulyarnykh integral'nykh uravneniy: dis. kand. fiz.-mat. nauk* [Optimal methods of multidimensional singular integrals calculation and solution of singular integral equations: dissertation to apply for the degree of the candidate of physical and mathematical sciences]. Saransk, 2004, 197 p.
15. Natanson I. P. *Konstruktivnaya teoriya funktsiy* [Constructive theory of functions]. Moscow; Leningrad: GIFML, 1949, 688 p.

Бойков Илья Владимирович

доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий кафедрой
высшей и прикладной математики,
Пензенский государственный университет
(Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: math@pnzgu.ru

Boykov Il'ya Vladimirovich

Doctor of physical and mathematical
sciences, professor, head of sub-department
of higher and applied mathematics,
Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Захарова Юлия Фридриховна

кандидат физико-математических наук,
доцент, кафедра высшей и прикладной
математики, Пензенский
государственный университет
(Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: math@pnzgu.ru

Zakharova Yuliya Fridrikhovna

Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor,
sub-department of higher and applied
mathematics, Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Гринченков Григорий Игоревич

аспирант, Пензенский государственный
университет (Россия, г. Пенза,
ул. Красная, 40)

E-mail: math@pnzgu.ru

Grinchenkov Grigoriy Igorevich

Postgraduate student,
Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Семов Михаил Александрович

аспирант, Пензенский государственный
университет (Россия, г. Пенза,
ул. Красная, 40)

E-mail: math@pnzgu.ru

Semov Mikhail Aleksandrovich

Postgraduate student,
Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

УДК 517.392

Бойков, И. В.

Ненасыщаемые кубатурные формулы вычисления гиперсингулярных интегралов / И. В. Бойков, Ю. Ф. Захарова, Г. И. Гринченков, М. А. Семов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2013. – № 3 (27). – С. 5–24.